Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2018/2019**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Polynômes - TD 1

1. Soient $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, où $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, avec $g(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ tels que
(i) $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, et
(ii) $r(x) = 0$ ou $\deg r(x) < \deg g(x)$.
De plus, $q(x)$ et $r(x)$ sont uniques *(indication: récurrence sur* $\deg f(x)$*)*.

2. Soit $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ où $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, et soit $a \in \mathbb{F}$ une racine de $f(x)$. Montrer que $x - a$ divise $f(x)$. Plus généralement, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les racines distincts de $f(x)$ dans $\mathbb{F}$, montrer qu'il existe $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ tels que

$$f(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_n)^{m_n}\, g(x).$$

3. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ tel que $f(i) = 0$. Montrer que $x^2 + 1$ divise $f(x)$.

4. Soit $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ où $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Montrer que si $\deg f(x) \in \{2, 3\}$ et $f(x)$ n'a pas de racines dans $\mathbb{F}$, alors $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{F}[x]$.

5. Si $c \in \mathbb{F}^*$, alors $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{F}[x] \Leftrightarrow c\, f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{F}[x]$.

6. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$ est une racine de $f(x)$, alors $\bar{z} = a - bi$ est aussi une racine de $f(x)$. En déduire que si $f(x)$ est un polynôme de degré impair, alors $f(x)$ a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

7. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Le polynôme $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x] \Leftrightarrow \deg f(x) = 1$ ou $\deg f(x) = 2$ et $f(x)$ n'a pas de racines réelles.

8. Déterminer si les relations suivantes sur $\mathbb{R}$ sont réflexives, symétriques ou transitives :
(a) $a \sim b \Leftrightarrow ab = 0$;
(b) $a \sim b \Leftrightarrow ab \neq 0$;
(c) $a \sim b \Leftrightarrow |a - b| < 5$.

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit $a \sim b$ si et seulement si $f(a) = f(b)$.
(a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
(b) Décrire la classe d'équivalence de 3.

10. Pour $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, on définit $(a, b) \sim (c, d)$ si et seulement si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
(a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Décrire la classe d'équivalence de $(0, 0)$.
(c) Donner cinq éléments dans la classe d'équivalence de $(1, 0)$.